

Zadaci iz teorije brojeva s natjecanja učenika osnovnih škola

1. Postoji li prirodni broj čiji je umnožak znamenki 1386?
2. Odredite četiri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 3024.
3. S koliko nula završava umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do 49?
4. Odredite sve parove parove troznamenkastih brojeva čiji je umnožak 51051.
5. Umnožak dva cijela broje daje 161. Koji su to brojevi, ako je svaki od njih manji od 23?
6. Odredite najmanji prirodni broj a za koji je umnožak $a \cdot a \cdot a$ višekratnik broja 500.
7. Odredite sve prirodne brojeve sa svojstvom da pri dijeljenju s 15 količnik bude jednak ostatku.
8. Ako brojeve 8746 i 1652 podijelimo istim prirodnim brojem, dobivamo ostatak 16, odnosno 14. S kojim brojem valja podijeliti zadane brojeve?
9. Odredite znamenku a u broju $\overline{2461a}$ tako da ostaci dijeljenja tog broja s 3 i s 5 budu jednaki.
10. Odredite najmanji prirodni broj djeljiv sa 7 koji pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1.
11. Pri dijeljenju jednog prirodnog broja drugim količnik je 18, a ostatak 14.
 - a) Odredite djeljenik i djelitelj tako da je svaki od njih djeljiv sa 7, pri čemu je djelitelj veći od ostatka.

b) Kako će se promijeniti količnik, a kako ostatak, ako i djeljenik i djelitelj smanjimo 7 puta?

12. Najveći zajednički djelitelj dva prirodna broja je 24, a najmanji zajednički višekratnik istih brojeva je 504. Nijedan od tih brojeva nije djeljiv drugim brojem. Koji su to brojevi?
13. Odredite sve parove prirodnih brojeva za koje je razlika između njihova najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja jednaka 30.
14. Zbrajanjem četiri broja neke su znamenke pogrešno pročitane, pa je došlo do pogreške u rezultatu. U prvom pribrojniku znamenka stotica 2 bila je pročitana i pribrojena kao 5, u drugom pribrojniku znamenka tisućica 3 pribrojena je kao 8, u trećem pribrojniku znamenka jedinica 9 pribrojena je kao 2, a u četvrtom pribrojniku znamenka desetica 7 pribrojena je kao 4. Rezultat takva zbrajanja bio je 28975. Odredite pogrešku u rezultatu i točan zbroj.
15. Pri dijeljenju nekog prirodnog broja s 47, učenik je zabunom u dijeljenju znamenku tisućica 6 i znamenku jedinica 8 krivo pročitao i tako dobio količnik 416 i ostatak 21. Odredite točan količnik i ostatak.
16. Na pismenom ispitu trebalo je riješiti 20 zadataka. Za svaki riješeni zadatak učenik dobiva 4 boda, za svaki neriješeni učeniku se oduzimaju 3 boda. Koliko je zadataka učenik riješio ako je na kraju imao 38 bodova?
17. Na nekom ispitu znanja trebalo je riješiti 30 zadataka. Za svaki točno riješen zadatak učenik je dobio 5 bodova, za djelomično riješen 3 boda, a za netočan i neriješen zadatak učeniku su se oduzela 2 boda. Koliko je zadataka riješio točno, koliko djelomično, a koliko netočno učenik koji je skupio 95 bodova, pri čemu je za točno riješene i neriješene zadatke zajedno dobio 65 bodova?
18. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na jednodnevni izlet osigurala 15 autobusa, od kojih su neki imali po 52 sjedala, a ostali svaki po 43 sjedala. Koliko je bilo jednih a koliko drugih autobosa ako je na svakom sjedalu sjedio samo jedan učenik, pri čemu su sva sjedala bila popunjena?
19. Učenici jednog odjela 6. razreda pisali su kontrolnu zadaću iz matematike. Trećina učenika nije pravilno riješila jedan zadatak, četvrtina

dva zadatka, šestina tri zadatka, a osmina učenika pogrešno je riješila sva četiri zadatka. Koliko je učenika pravilno riješilo sve zadatke, ako u odjelu nema više od 30 učenika?

20. Dano je šest prirodnih brojeva tako da je treći broj jednak zbroju prvog i drugog, četvrti broj jednak je zbroju drugog i trećeg, peti broj jednak je zbroju trećeg i četvrtog, a šesti broj jednak je zbroju četvrtog i petog. Koliki je zbroj tih šest brojeva ako je peti jednak 7?
21. Kućni brojevi na lijevoj strani ulice označavaju se neparnim, a na desnoj parnim brojevima. Zbroj kućnih brojeva s jedne strane ulice između dva raskrižja je 45. Koji su to kućni brojevi?
22. Odredite onaj prirodni broj koji ima svojstvo da je zbroj njegovih znamenki jednak razlici broja 223 i tog broja.
23. Od znamenki troznamenkastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih dvoznamenkastih brojeva?
24. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od umnoška svojih znamenki.
25. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.
26. Odredite četiri uzastopna prirodna broja ako je umnožak prvog i drugog za 38 manji od umnoška trećeg i četvrtog.
27. Odredite tri uzastopna neparna prirodna broja kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.
28. Poznati engleski matematičar August de Morgan živio je u 19. stoljeću. Jednom je rekao: "Bio sam x godina star godine x^2 ." Kad je rođen?
29. Odredite dvoznamenkasti broj koji ima svojstvo da se poveća 26 puta ako mu s lijeve strane dopišemo znamenku 9.
30. Postoji li prirodni broj koji ima svojstvo: ako se prva znamenka s lijeve strane ispusti i dopiše iza znamenke jedinica, tada je novi broj 5 puta veći od početnog?
31. Ako između znamenki dvoznamenkastog broja upišemo nulu, dobiveni troznamenkasti broj je devet puta veći od početnog dvoznamenkastog broja. Odredite taj dvoznamenkasti broj.

32. Ako između znamenki dvoznamenkastog broja upišemo taj dvoznamenkasti broj, tad je novi četveroznamenkasti broj 77 puta veći od danog dvoznamenkastog broja. Koji je to dvoznamenkasti broj?
33. Neki dvoznamenkasti broj djeljiv je s 3. Ako se između znamenki tog broja upiše nula i tako dobivenom troznamenkastom broju doda dvostruka vrijednost znamenke stotica, dobiva se 9 puta veći broj od danog dvoznamenkastog broja. Koji dvoznamenkasti broj ima to svojstvo?
34. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da se šest puta smanji ako tom broju izostavimo znamenku desetica?
35. Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslijedom, novi četveroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo?
36. Kojom znamenkom završava umnožak 666 faktora pri čemu je svaki faktor jednak 777?
37. Četveroznamenkasti broj \overline{dcca} , troznamenkasti broj \overline{abc} i dvoznamenkasti broj \overline{ba} povezuje jednakost $\overline{abc} + \overline{ba} = \overline{dcca}$. Kolike su znamenke a , b , c i d ?
38. Zbroj peteroznamenkastog broja \overline{abcde} i peteroznamenkastog broja \overline{abced} je 31587. Koji su to brojevi?
39. Odredite takav prirodan broj n da je umnožak $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$ šesteroznamenkasti broj čija je znamenka jedinica 4.
40. Ako je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n$ (n je prirodan broj) jednaka 4, onda je znamenka desetica tog broja 2. Dokazati.
41. Zbroj dva broja veći je od umnoška tih brojeva, a manji od razlike tih istih brojeva. Jesu li ti brojevi pozitivni ili negativni?
42. Što je veće i za koliko: zbroj svih cijelih brojeva x za koje vrijedi $-1777 < x < 1077$ ili umnožak svih tih brojeva?
43. Dokažite da je poluzbroj kvadrata dvaju parnih brojeva jednak zbroju kvadrata nekih dvaju cijelih brojeva.
44. Volumen kvadra je 336 cm^3 , a duljine triju bridova iz istog vrha tri su uzastopna prirodna broja. Koliko je opološje tog kvadra?

45. U zapisu dvoznamenkastog broja x i četveroznamenkastog broja y pojavljuje se 6 puta jedna te ista znamenka. Što je veće: x^{20} ili y^{10} ?
46. Odredite sve cijele brojeve a i b za koje vrijede jednakosti $a^2 - 10b + 1 = 0$ i $b^2 + 14a + 73 = 0$.
47. Broju 10 dopišite s lijeve i desne strane jednu znamenku tako da novi broj bude djeljiv s 36.
48. Odredite najveći šestoznamenkasti broj $\overline{456abc}$ djeljiv sa 7, 8 i 9.
49. Odredite najveći i najmanji šestoznamenkasti broj $\overline{993abc}$ koji je djeljiv i sa 6 i sa 7.
50. Odredite znamenke a i b u broju $\overline{78a9b}$ tako da broj bude djeljiv s 18.
51. Napišite sve sedmeroznamenkaste brojeve pomoću znamenki 1 i 2 koji su djeljivi s 36.
52. Dokažite da zbroj 12 uzastopnih prirodnih brojeva nikad nije djeljiv s 4.
53. Postoje li 22 uzastopna prirodna broja čiji je zbroj djeljiv s 22?
54. Neka su brojevi a, b, c, d redom ostaci dijeljenja broja n s 2, 3, 5, 11. Dokažite da je broj $15a + 10b + 6c + 30d - n$ djeljiv s 30.
55. Dokažite da je za bilo koja dva prirodna broja a i b uvijek točna barem jedna od ove 4 tvrdnje:
1. broj a djeljiv je s 3,
 2. broj b djeljiv je s 3,
 3. zbroj $a + b$ djeljiv je s 3,
 4. razlika $a - b$ djeljiva je s 3.
56. Dokažite da je razlika kvadrata dva uzastopna prirodna broja uvijek neparan broj.
57. Dokažite da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja djeljiva s 8.
58. Dokažite da je ostatak dijeljenja troznamenkastog prirodnog broja s 9 jednak ostatku dijeljenja zbroja znamenki tog troznamenkastog broja s 9.

59. Dokažite da je zbroj kubova tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa zbrojem ta tri prirodna broja.
60. Za tri uzastopna neparna prirodna broja uvijek vrijedi da umnožak prvog i trećeg nije djeljiv s drugim brojem. Dokazati.
61. Dijeljenjem broja $(n + 200)$ s 37 ostatak je 19. Koliki je ostatak dijeljenja prirodnog broja n s 37?
62. Dokažite da je broj $n^3 + 6n^2 - 4n + 3$ djeljiv s 3 za bilo koji prirodan broj n .
63. Ako je broj $u^2 + uv + v^2$ djeljiv s 9, tad su brojevi u i v djeljivi s 3. Dokazati.
64. Dokazati da je broj $10^n + 8$ djeljiv sa 72 za bilo koji prirodan broj $n > 2$.
65. Dokazati da je broj $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ djeljiv s 45.
66. Dokazati da je broj $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ djeljiv s 10 za svaki prirodni broj n .
67. Dokazati da je $2^{10} + 5^{12}$ složen broj.
68. Odredite dvoznamenkasti broj koji je jednak dvostrukom umnošku svojih znamenki.
69. Odredite dvoznamenkasti broj koji je jednak zbroju znamenke desetica i kvadrata znamenke jedinica.
70. Odredite sve parove cijelih brojeva x i y čiji je umnožak pet puta veći od njihova zbroja.
71. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Odredite brojeve.
72. Za gradnju vodovoda duljine 70 metara mogu se rabiti ravne cijevi duljine 3 metra i 5 metara. Na koje sve načine možemo odabrati ove cijevi za izgradnju vodovoda uz uvjet da se cijevi ne režu?
73. Vrpcu duljine 100 cm treba razrezati na dijelove dviju duljina: vrpcu duljine 7 cm i vrpcu duljine 12 cm, a da pritom ne bude ostatka. Koliki je broj komada vrpce jedne i druge vrste?

74. Ako zbroju godina dvoje djece dodamo umnožak njihovih godina, dobiva se 34. Koliko godina ima svako dijete?
75. Koje su godine u prošlom stoljeću rođeni oni ljudi koji su 1992. godine navršili onoliko godina koliko iznosi zbroj znamenki godine njihova rođenja?
76. Unuk je upitao baku: "Koliko je tebi godina?" Ona je odgovorila: "Svaka od dvije znamenke u broju mojih godina predstavlja broj godina jednog od tvoja dva brata, Ivana i Marka." Još je rekla: "Ako zbrojiš moje godine i godine tvoje braće, dobit ćeš broj 83." Koliko godina ima baka?
77. Bogati voćar, vlasnik 441 stabla maslina u masliniku, želi ta stabla podijeliti svojoj djeci i unucima, tako da svako njegovo dijete dobije 5 stabala maslina više nego svako unučić. Koliko djece, a koliko unučići ima bogati voćar, ako je ukupan broj djece i unučići 18? Koliko je stabala maslina dobilo svako njegovo dijete, a koliko svako unučić?
78. U prikupljanju starog papira jedan učenik sedmog razreda skupio je 26 kg, a ostali iz njegova razreda po 11 kg svaki. U osmom razredu jedan je učenik skupio 25 kg, a ostali po 10 kg svaki. Koliko ima učenika u svakom razredu, ako se zna da su oba razreda prikupila jednaku masu papira i da je ukupna masa veća od 400 kg, a manja od 600 kg?
79. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2 - xy - 2y^2 = 18$.
80. Odredite sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi: $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
81. Riješite jednadžbu $xy - 2y = 7x - 5$ u skupu cijelih brojeva.
82. Odredite brojeve a i b za koje vrijedi
- $$a^2 + b^2 = 2(2a - 3b) - 13.$$
83. Za koju vrijednost parametra m sustav:
- $$\begin{aligned} mx - y &= 2 \\ 2x + y &= 3m \end{aligned}$$
- ima cjelobrojno rješenje?
84. Neka su x, y i z prirodni brojevi takvi da je $x < y < z$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Odredite brojeve x, y i z .