Noviji zadatci iz teorije brojeva s natjecanja učenika osnovnih i srednjih škola (7., 8. i 1. razred)

1. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za jedan manji od šesteroznamenkastog zbroja svojih znamenki.

2. Razlika dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama, ali obrnutog redosljeda, iznosi 45, a zbroj tih dvaju dvoznamenkastih brojeva jednak je umnošku dva ista prirodna broja. Koja dva dvoznamenkasta broja imaju to svojstvo?

3. Dana dva prirodna broja odnose se kao 19 : 8. Ako podijelimo zbroj tih brojeva s njihovom razlikom, količnik je 2 i ostatak 20. Koji su to brojevi?

4. Odredi znamenke a, b i c, pri čemu ni jedna od njih nije jednaka nuli, tako da za troznamenkasti broj $\overline{abc}$ vrijedi jednakost $\overline{abc} : c = \overline{bc}$.

5. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$, tako da je znamenka desetica drugog broja jednaka dvostrukoj znamenci jedinica prvog broja i da je
$$\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = \overline{ba}^2 + \overline{dc}^2.$$

6. Odredi sve parove prostih brojeva čija je razlika kvadrata 120.

7. Duljine stranica provokutnog trokuta prirodni su brojevi, pri čemu je duljina jedne katete 15. Kolike su duljine ostalih stranica takva pravokutnog trokuta? Koliko ima različitih pravokutnih trokuta s tim svojstvom?

8. Ostatak pri dijeljenju cijelog broja a s 4 je 3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $a^2 - a$ s 4?

9. Ako zbroju dviju znamenaka nekog broja pribrojimo kvadrat zbroja njegovih znamenaka, dobivamo taj dvoznamenkasti broj. Odredi dvoznamenkaste brojeve s tim svojstvom.

10. Odredite sve cijele brojeve x za koje je

$$\frac{x^3 + 3x^2 - x - 10}{x + 2}$$

prirodan broj.

11. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c), takvih da je $\text{nzd}(b, c) = 1$ i

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

12. Jedna zagrebačka obitelj krenut će ove godine na ljetovanje na Jadran posljednjeg dana u mjesecu. Umnožak rednog broja dana polaska i rednog broja mjeseca povratka s brojem djece u obitelji te brojem dana ljetovanja je 14384. Odredite datum povratka.

13. Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti kvadrat nekog cijelog broja.

14. Neka su x i y cijeli brojevi. Dokažite da je tada $3x + y$ djeljivo s 13, ako i samo ako je $5x + 6y$ djeljivo s 13.

15. Odredite broj $\overline{abcd}$ s ovim svojstvom:

$$\begin{aligned} \overline{cda} - \overline{abc} &= 297 \\ a + b + c &= 23. \end{aligned}$$

($\overline{abcd}$ je zapis broja u dekadskom sustavu.)

16. Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 1999$ nema nijedno cjelobrojno rješenje.

17. Darko će 2000. godine imate onoliko godina koliki je zbroj znamenki godine njegovog rođenja. Koje godien je Darko rođen?

18. Između znamenki 4 i 9 broja 49 umetnuto je nekoliko četvorki, a iza njih isto toliko osmica. Dokažite da je tako dobiveni broj potpuni kvadrat.

19. Ako je n neparan prirodan broj, dokažite da je broj $n^3 + 3n^2 - n - 3$ djeljiv s 48.

20. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.

21. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

22. Dokažite da je suma kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiva sumom tih triju brojeva.

23. Odredi parove cijelih brojeva x i y koji zadovoljavaju jednadžbu
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1.$$

24. Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 7 kojima je zbroj znamenki jednak 8.

25. Dijeljenjem dvoznamenkastog broja razlikom njegovih znamenki dobije se 8 puta veći količnik nego pri dijeljenju istog dvoznamenkastog broja zbrojem njegovih znamenki, pri čemu su ostatci u oba dijeljenja jednaki. Odredi taj dvoznamenkasti broj.

26. Ako dvoznamenkasti broj podijelimo zbrojem njegovih znamenaka, količnik je 6 i ostatak 2. Ako isti broj podijelimo umnoškom njegovih znamenaka, količnik je 5 i ostatak 2. Koji dvoznamenkasti broj ima to svojstvo?

27. Od pet uzastopnih neparnih prirodnih brojeva uvijek postoji bar jedan broj koji nije djeljiv niti s 3 niti s 5, niti s 7. Dokažite.

28. Odredite sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$, tako da pri dijeljenju tog broja dvoznamenkastim brojem $\overline{bc}$ dobivamo količnik 7 i ostatak 20.

29. Kvadratu nekog cijelog broja a dodamo njegov trostruki višekratnik i oduzmemo 7, pa tako dobiveni broj podijelimo sa zbrojem $a+2$. Za koji cijeli broj a je i taj količnik također cijeli broj?

30. Koja je 1997. decimala u decimalnom zapisu razlomka $\frac{71}{70}$?

31. Dokaži da je zbroj $1^{1998}+2^{1998}+3^{1998}+4^{1998}$ djeljiv s 10.

32. Odredite posljednju znamenku zbroja $3^{203}+7^{122}$.

33. Ako je veći od dva uzastopna prirodna broja kvadrat nekog prirodnog broja, tada je umnožak tih dvaju uzastopnih brojeva djeljiv s 12. Dokažite!

34. Odredite sve proste brojeve p za koje je broj $5p + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja. Odgovor obrazložite.

35. Dokažite da je $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ djeljivo s 5 za svaki prirodni broj n.

36. Na koliko načina prodavač može točno izvagati glavicu kupusa mase 1.67 kg ako na raspolaganju ima samo utege masa 20 g i 50 g?

37. Odredite sve uređene parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi jednakost
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

38. Dokaćite da je izraz $(n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4$ kvadrat prirodnog broja za svaki prirodan broj n.

39. Dokaži da je broj $8^{5004} - 6^{3008}$ djeljiv s 10.

40. Odredi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve n takve da je broj
$$\sqrt{\frac{n+36}{n-36}}$$
isto prirodni broj.

41. Odredi sve pravokutne trokute kojima su duljine stranica prirodni brojevi i pri tome je duljina jedne od njih jednaka 17.

42. Odredite dva uzastopna prirodna broja, tako da se jedan od njih može prikazati kao umnožak $2(n - 3)(n + 1)$, a drugi kao umnožak $(n - 2)(2n - 1)$, pri čemu je n prirodan broj.

43. Pokažite da se razlomak $\frac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

44. Odredite sve uređene trojke brojeva (x, y, z) za koje je $x - y = y - z = 96$, pri čemu su x, y, z kvadrati prirodnih brojeva.

45. Neka je $\{a_n\}$ niz pozitivnih prirodnih brojeva, takav da je $a_1 < a_2$ i $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ za $n \geq 1$. Ako je $a_7 = 720$, koliko je a_8?

46. Dokažite da je svaki broj oblika $m^4 + 4k^4$ složen, ako su m i k pozitivni cijeli brojevi i $k \geq 2$.

47. Odredite znamenke $a \neq 0$, b, c i d tako da razlomak

$$\frac{a}{b+c+d}$$

ima decimalni zapis $0.abc$.

48. Postoji li cijeli broj x za koji su oba broja $\frac{14x+5}{9}$ i $\frac{17x-5}{12}$ cijela?

49. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0.$$

50. Koliko ima četvroznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa 7, takvih da se zamjenom znamenaka dobije broj (ne nužno četvroznamenkast) djeljiv sa 7?

51. Nađite sve prirodne brojeva s barem tri znamenke u kojima svake dvije uzastopne čine kvadrat prirodnog broja.

52. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

53. Neka je A prirodan broj s parnim brojem n znamenaka, a B broj dobiven bilo kojom promjenom poretka znamenaka broja A, tako da vrijedi $A + B = 10^n$.

    (a) Odredi barem jedan par brojeva A i B koji zadovoljavaju gornje svojstvo za $n = 4$.

    (b) Dokaži da je za svaki paran broj n svaki od brojeva A i B s gornjim svojstvom djeljiv s 10.

54. Odredi znamenku jedinica (zadnju znamenku) umnošku

$$(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)\cdots(8^{2006}-5^{2006}).$$

55. Odredi sve četveroznamenkaste brojeva $\overline{1abc}$ za koje vrijedi

$$\overline{1abc} + \overline{cba1} = \overline{bbdd},$$

pri čemu različitim slovima odgovaraju različite znamenke.

56. Zadana su dva dvoznamenkasta broja, pri čemu je jedan od njih prost broj. Ako jednom od ta dva broja izbrišemo zanmenku desetica pa istu znamenku dopišemo drugom broju kao znamenku stotica, dobit ćemo najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik zadanih brojeva. Odredi početne brojeve tako da razlika najvećeg i najmanjeg među sva četiri broja bude najveća moguća.

57. U vagonu se nalazi 1 tona krumpira koji treba pretovariti u kamion. Posao obavlja jedan radnik, kojemu su na raspolaganju vreće od 60 kg i 80 kg, a odjednom može prenijeti samo jednu punu vreću krumpira. Koliko kojih vreća radnik mora uporabiti ako posao želi obaviti s najmanjim brojem prenošenja? Prenose se samo do kraja napunjene vreće i sav krumpir mora biti pretovaren.

58. Koje je godine 20. stoljeća rođena osoba koja je 1999. godine navršila onoliko godina koliki je dvostruki zbroj znamenki godine njezina dvadesetog rođendana?

59. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je 4923. Dopišemo li jednome od ta dva broja s desne strane znamenku 7, a drugome obrišemo znamenku jedinica, dobiveni brojevi su jednaki. Odredite polazne brojeve.

60. Umnožak prva 2004 prirodna broja $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2003 \cdot 2004$ djeljiv je s brojem a kojemu su svi prosti faktori jednaki 3. Koliko najviše trijki može imati broj a u rastavu na proste faktore?

61. Odredite sve četveroznamenkaste brojeve $\overline{abcd}$ tako da bude točna jednakost

$$2 \cdot \overline{abc} = \overline{bcd}.$$

62. Odredi troznamenkasti broj $\overline{abc}$, tako da je dvoznamenkasti broj $\overline{ac}$ jednak 12% broja $\overline{abc}$.

63. Odredi sve četvroznamenkaste brojeve $\overline{abba}$ tako da vrijedi $\overline{aa} \cdot \overline{10b} = \overline{abba}$, pri čemu je $a \neq b$.

64. Odredi sve cijele brojeve a, b i c za koje vrijede jednakosti: $a^2 + 2b^2 - 2bc = 121$ i $2ab - c^2 = 121$.

65. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji imaju svojstvo da je umnožak svakog od tih brojeva sa 6 isto troznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka jednak zbroju znamenaka početnog troznamenkastog broja.

66. Odredi najmanji prirodni broj a sa svojstvom da je broj $\sqrt{1998a}$ također prirodan.

67. Odredi najmanji prirodni broj n za koji je svaki od razlomaka

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \ldots, \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$

neskrativ.

68. Koliko ima uređenih parova troznamenkastih prirodnih brojeva (x, y) koji su rješenja jednadžbe $3x + 4y = 1998$?

69. Odredite najveći troznamenkasti broj s različitim znamenkama iz skupa $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tako da je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji se dobivaju premještanjem njegovih znamenki jednak 2220.

70. Odredite sve cijele brojeve n za koje je $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ također cijeli broj.

71. Dokažite da je zbroj $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{1999} + 2^{2000}$ djeljiv s 30.

72. Na kružnici su u smjeru kretanja kazaljke na satu napisani svi prirodni brojevi od 1 do 2000. Precrtajmo najprije broj 1, zatim broj 16, pa 31, i tako redom svaki petnaesti broj u istom smjeru. Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku još neprecrtano?

73. Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je $\frac{2004-n}{99}$ prirodan broj?

74. Učitelj i njegovi učenici krenuli su autobusom u mjesto gdje se održavalo Državno natjecanje iz matematike. Sjedili su na sjedalima čiji su brojevi bili uzastopni prirodni brojevi, a njihov je zbroj iznosio 54. Koliko je učenika učitelj vodio ako je samo jedan od brojeva sjedala na kojima su sjewdili bio prost?

75. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ koji imaju svojstvo da je $\frac{22}{a^2+b^2+c^2}$ prirodan broj.

76. Nađi sve prirodne brojeve n za koje su ispravne točno dvije od sljedeće tri tvrdnje:

    1) Broj n je kvadrat pšrirodnog broja.

    2) Posljednja znamenka broja n je 3.

    3) Broj 15 je kvadrat prirodnog broja.

77. Zbroj kvadrata koji kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva nije kvadrat prirodnog broja. Dokažite!

78. Da li jednadžba $y^2 = x^2 + 1990$ ima cjelobrojno rješenje?

79. Odredite četvroznamenkasti broj oblika $\overline{aabb}$ koji je potpun kvadrat.

80. Za koje $n \in \mathbb{N}$ je izraz $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ cjelobrojan?

81. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}.$$

82. Dokažite da postoji broj oblika $\overline{\ldots 1995}$ djeljiv sa 1999.

83. Dokažite da je izraz

$$a^4 - 10a^2 + 9$$

djeljiv s 1920 za svaki prosti broj $a > 5$.

84. Nađite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$10(m+n) = mn.$$

85. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$$

u skupu prirodnih brojeva.

86. Neka je $m \geq 2$ prirodan broj. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima jednadžba

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor ?$$

87. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?

88. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^2 = 576.$$

(Naputak: Izraz s lijeve strane rastaviti na faktore.)

89. Duljine stranica trokuta su prosti brojevi. Dokažite da njegova površina ne može biti cijeli broj.

90. Koliko djelitelja broja 30^{2003} nisu djelitelji broja 20^{2000}?

91. Niz znamenaka $1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, \ldots$ konstruira se tako da je svaki broj počevši od petog, jednak znamenki jedinica zbroja prethodne četiri znamenke.

(a) Da li se u tom nizu redom pojavljuju znamenke $2, 0, 0, 4$ tim redom?

(b) Da li se u tom nizu ikad ponavljaju početne znamenke $1, 2, 3, 4$ tim redom?

92. Odredite sve brojeve čiji je zapis u dekadskom sustavu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y, z nepoznate znamenke, koji su djeljivi sa 792.

93. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadske znamenke) koji su jednaki izrazu $x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.

94. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

95. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2.$$