1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 28.6.2021.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Odredite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $202x^2 + 168xy + 35y^2$.

2. Odredite $h(-91)$ i sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -91$.

3. Dokažite:

(a)

$$\sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} k = \frac{n}{2}\varphi(n), \quad n \geq 2.$$

(b) Neka je $k \geq 1$ prirodan broj te $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ periodička funkcija s periodom k takva da je $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$. Za prirodan broj n, pokažite da je $f(n) = 0$ ili postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f(n)^m = 1$.

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{367}{813}$ i $\frac{7+\sqrt{15}}{8}$.

5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 85.

6. Odredite najmanja rješenja u skupu prirodnih brojeva (ako postoje) jednadžbi $x^2 - 131y^2 = -1$ i $x^2 - 131y^2 = 1$.

Rješenja:

1. $3x^2 + 2xy + 5y^2$

2. $5x^2 + 3xy + 5y^2, x^2 + xy + 23y^2, h(-91) = 2.$

3. (a) $(k, n) = 1 \iff (n - k, k) = 1$, pa dobivamo da je

$$\sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} k = \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} (n - k).$$

Iz

$$2 \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} k = \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} k + \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} (n - k) = \sum_{\substack{k \leq n-1 \\ (k,n)=1}} n = n\varphi(n),$$

što je i trebalo pokazati.

(b1) Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Tada je skup $\{n^m : m \in \mathbb{N}\}$ beskonačan, a skup $\{f(n^m) : m \in \mathbb{N}\}$ je konačan zbog periodičnosti od f. Stoga postoje $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2$ takvi da je $f(n^{m_1}) = f(n^{m_2})$, pa je zbog multiplikativnosti $f(n)^{m_1} = f(n)^{m_2}$, tj.

$$f(n)^{m_2 - m_1}(f(n)^{m_1} - 1) = 0$$

iz čega slijedi $f(n) = 0$ ili $f(n)^m = 1$, za $m = m_1$.

(b2) Ovo rješenje nam zapravo pokazuje jaču tvrdnju: svaka k-periodička potpuno multiplikativna ne-nul funkcija je **Dirichleov karakter**. Bez smanjenja opcenitosti, pretpostavimo da je k najmanji period od f. Jer je f $k-$periodična, vrijedi $f(k) = f(nk)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Iz uvjeta zadatka imamo $f(k) = f(n)f(k)$. Pretpostavimo prvo da je $f(k) \neq 0$. Slijedi da je $f(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je sada $f(k) = 0$. Ako je n takav da je $nzd(n, k) = d > 1$, tada postoje $r, s \in \mathbb{N}$ takvi da je $n = rd$ i $k = sd$. Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$f(m)f(d) = f(md) = f(md + k) = f(md + sd) = f(d)f(m + s).$$

Ako je $f(n) \neq 0$, tada je iz $f(n) = f(r)f(d)$ slijedi $f(d) \neq 0$. Zaključujemo da je $f(m) = f(m + s)$, tj. f ima period s. Obzirom da je $s < k$, imamo kontradikciju s minimalnošcu od k. Slijedi da je $f(n) = 0$.
Ako je $nzd(n, k) = 1$, tada iz Eulerovog teorema imamo $n^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $n^{\varphi(k)} = mk + 1$. Sad imamo

$$f(n^{\varphi(k)}) = f(n)^{\varphi(k)} = f(mk + 1) = f(1) = 1.$$

4. $\frac{367}{813} = [0, 2, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2]$, $\frac{7+\sqrt{15}}{8} = [1, 2, \overline{1, 3, 1, 1, 1, 3}]$.

5. $(85, 3612, 3613), (85, 720, 725), (85, 204, 221), (85, 132, 157),$
$(84, 13, 85), (77, 36, 85), (75, 40, 85), (68, 51, 85).$

6. $\sqrt{131} = [11, \overline{2, 4, 11, 4, 2, 22}]$. Slijedi da je period $r = 6$ paran, pa po Teoremu 7.10 iz skripte slijedi da jednadžba $x^2 - 131y^2 = -1$ nema rješenja. Nadalje, najmanje rješenje jednadžbe je dano s $(x, y) = (p_5, q_5) = (10610, 927)$.