Diskretna matematika

Rješenja zadataka za vježbu - drugi ciklus 2008/2009

1.a) $(15, 112, 113)$, $(8, 15, 17)$, $(9, 12, 15)$, $(15, 36, 39)$, $(15, 20, 25)$
1.b) $(20, 99, 101)$, $(20, 21, 29)$, $(12, 16, 20)$, $(20, 48, 52)$, $(15, 20, 25)$
1.c) $(20, 21, 29)$, $(29, 420, 421)$
1.d) $(38, 360, 362)$

2.a) $\frac{51}{97} = [0; 1, 1, 9, 5]$
2.b) $\frac{101}{31} = [3; 3, 1, 7]$
2.c) $\frac{58}{269} = [0; 4, 1, 1, 1, 3, 5]$

3.a) $\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$
3.b) $\sqrt{47} = [6; \overline{1, 5, 1, 12}]$
3.c) $\sqrt{57} = [7; \overline{1, 1, 4, 1, 1, 14}]$

4. $(3480, 413)$

5. $(145, 12)$, $(42049, 3480)$

6. Zatvorenost i asocijativnost slijedi iz istih svojstava grupe $(G, \cdot)$. Neutralni element je funkcija $e : S \to G$ definirana sa $e(s) = e_G$ za svaki $s \in S$. Inverz of $f \in X$ je funkcija $g : S \to G$ definirana sa $g(s) = (f(s))^{-1}$ za svaki $s \in S$.

7.a) 4
7.b) 3
7.c) 7
7.d) 3

8. Neka je $ab \in H$. Tada je $b(ab) \in bH = Hb$, pa je $ba = (bab)b^{-1} \in Hbb^{-1} = H$. Obrat se dokazuje sasvim analogno.

9. DA. Preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ definirano sa $f(z) = 2z$ je očito bijekcija i homomorfizam.

10. NE. Ako je $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ homomorfizam, onda je $f(0) = (0, 0)$, ali je također i $f(6) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = (0, 0)$, pa f nije injekcija.

11. $\varphi(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = \varphi(x)\varphi(y)$ pa je φ homomorfizam.
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1, -1\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \{x^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

12. Neka je $P = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Za $a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5} \in P$ je $(a+b\sqrt{5}) - (c+d\sqrt{5}) = (a-c) + (b-d)\sqrt{5} \in P$, pa je $(P, +)$ abelova grupa. Ako je $c+d\sqrt{5} \neq 0$, onda je $(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})^{-1} = \frac{ac-5bd}{c^2-5d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-5d^2}\sqrt{5} \in P$, pa je $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ abelova grupa.

$$(2 - 3\sqrt{5})^{-1} = -\frac{2}{41} - \frac{3}{41}\sqrt{5}$$

Polja P i $\mathbb{Q}$ nisu izomorfna. Zaista, pretpostavimo da je $f : P \to \mathbb{Q}$ izomorfizam. Tada je $f(1) = 1$ i $f(5) = f(1+1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = 5$. Neka je $f(\sqrt{5}) = a \in \mathbb{Q}$. Tada iz $5 = f(5) = f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = a^2$ slijedi da je $\sqrt{5}$ racionalan broj, što je kontradikcija.

13. Označimo zadani skup sa $\mathcal{M}$. Tvrdnja slijedi iz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & (b-d) \\ 2(b-d) & a-c \end{bmatrix} \in \mathcal{M},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & bc+ad \\ 2(bc+ad) & ac+2bd \end{bmatrix} \in \mathcal{M},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2-2b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}.$$

14. Ireducibilnost od g nad $\mathbb{Z}_2$ slijedi iz $g(0) = 1 \neq 0$ i $g(1) = 3 = 1 \neq 0$. Budući da je red od $\mathbb{F}_8^*$ prost broj 7, generator je bilo koji element od $\mathbb{F}_8^*$ različit od 1. Inverz od $a = t + 1$ je $a^{-1} = t^2 + t$.