DIOFANTSKE JEDNADŽBE

1. zadaća

6. 12. 2006.

1. Neka je m proizvoljan prirodan broj. Dokažite da postoji beskonačno mnogo rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ koja zadovoljavaju dodatni uvjet da je $y \equiv 0 \pmod{m}$.

2. Neka je (x_n, y_n) (rastući) niz rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima. Dokažite da za sve prirodne brojeve m, n vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{m+n} &= x_m x_n + d y_m y_n, \\ y_{m+n} &= x_m y_n + x_n y_m, \\ \frac{x_{2m}}{y_{2m}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_m}{y_m} + \frac{d y_m}{x_m}\right). \end{aligned}$$

3. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n sa svojstvom da je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka kvadratu nekog prirodnog broja. Nađite najmanjih šest prirodnih brojeva s tim svojstvom.

4. Dokažite da kongruencija $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ima rješenja za svaki prost broj p. Nađite barem jedan prirodan broj d ($d \neq 34$ i d nije potpun kvadrat) sa svojstvom da kongruencija $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ima rješenja za svaki prost broj p, ali da jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ nema rješenja u cijelim brojevima.

5. Dokažite da rješenja (x_n, y_n) jednadžbe $x^2 - dy^2 = 4$ zadovoljavaju rekurzije:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_1 x_{n+1} - x_n, \\ y_{n+2} &= x_1 y_{n+1} - y_n. \end{aligned}$$

6. Neka su x, y neparni prirodni brojevi za koje vrijedi $x^2 - dy^2 = -4$. Dokažite: ako je $d \equiv 5 \pmod{16}$, onda je $x \equiv \pm y \pmod{8}$, a ako je $d \equiv 13 \pmod{16}$, onda je $x \equiv \pm 3y \pmod{8}$.

Rok za predaju zadaće je 20.12.2006.

Andrej Dujella