

# DIOFANTSKE APROKSIMACIJE I PRIMJENE

## 2. zadaća

1. Dokažite da nazivnici  $q_n$  u konvergentama razvoja u jednostavni verižni razlomak iracionalnog broja  $\alpha$  zadovoljavaju nejednakost  $q_n \geq F_n$ , gdje je  $F_n$   $n$ -ti Fibonaccijev broj.

2. a) Dokažite da vrijedi

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$$

ako je  $a_0 \neq 0$ .

b) Neka je  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  razvoj u jednostavni konačni verižni razlomak racionalnog broja  $\frac{r}{s}$ , gdje je  $\text{nzd}(r, s) = 1$  i  $r \geq s > 0$ . Dokažite da je ovaj razvoj simetričan, tj.  $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots$ , ako i samo ako  $r|(s^2 + (-1)^{n-1})$ .

3. Na skupu  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  zadana je relacija  $\cong$  na sljedeći način:  $\alpha \cong \beta$  ako i samo ako postoje cijeli brojevi  $a, b, c, d$  takvi da je  $ad - bc = \pm 1$  i

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

Dokažite da je  $\cong$  relacije ekvivalencije.

4. a) Jesu li brojevi  $\sqrt{5}$  i  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ekvivalentni?  
b) Jesu li brojevi  $\sqrt{3}$  i  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  ekvivalentni?
5. Dokažite da u algoritmu za računanje razvoja u verižni razlomak kvadratnih iracionalnosti vrijedi da je  $s_n > 0$  za dovoljno velike indekse  $n$ .

Andrej Dujella